# Tema 1

# 1.2. Sistemas de Ecuaciones

Álgebra. 1º IEC

# s de Ecuaciones Lineales

## uaciones y sistemas lineales

### .1.1. Tipos de sistemas

### .1.2. Sistemas escalonados

### .1.3. Teorema de existencia y unicidad

## solución de sistemas de ecuaciones

### .2.1. Equivalencia por filas

### .2.2. Método de Gauss

#### Box.I.2.1. Algoritmo de Eliminación de Gauss-Jordan

### .2.3. Sistemas homogéneos e inhomogéneos

# …as de Ecuaciones Lineales

## …ones y sistemas lineales

### … de sistemas

… lineal es una expresión en $n$ variables $x_1, x_2, \dots x_n$ de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ \dots a_nx_n = b$ con …lares) y $n \in \mathbb{N}$.

…de la ecuación o término independiente; $a_i$ - coeficientes; $x_i$ – incógnitas. $a_1 \neq 0$ es la …pal y $x_1$ la variable dominante.

…aciones lineales no contienen productos, potencias o raíces de variables, ni funciones …s, exponenciales o logarítmicas de las variables.

### …neales con una incógnita

… la ecuación $ax = b$.

… $x = a^{-1} \cdot b$ es solución única (sistema compatible determinado). $x$ es una variable básica

… $\neq 0 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución (sistema incompatible)

… $0 \Rightarrow\ \forall x = k \in K$ es solución (sistema compatible indeterminado). $x$ es una variable libre

**ineales con varias incógnitas**

da la ecuación degenerada $0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_n = b$ entonces:

a ecuación no tiene solución

odo vector $\vec{x} = (k_1, k_2, \ldots k_n) \in K^n$ es solución

ción lineal no degenerada $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$ con entrada principal $x_p$ (o sea la da no nula $a_p \neq 0$). Entonces:

$x_j$ con $j \neq p$ se llaman variables libres (pueden tomar cualquier valor)

ariable básica (determinada a partir de las variables libres)

**cuaciones**

e ecuaciones lineales es una colección de una o más ecuaciones que involucran las mismas $_2, \ldots x_n$, esto es, un conjunto de $m$ ecuaciones (cada una lineal) en las mismas $n$ variables.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

son los términos independientes. La primera entrada no nula de cada ecuación del sistema se llama **entrada principal**.

ede representarse en forma abreviada como:

$= b_i,\ i = 1,2, \dots m.\ a_{ij}$ es el coeficiente de $x_j$ en la ecuación $i$-ésima.

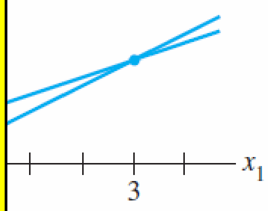
ectorial: $x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ o $x_1\vec{a}_1^c + x_2\vec{a}_2^c + \cdots + x_n\vec{a}_n^c = \vec{b}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ con } A = [\vec{a}_1^c\ \ \vec{a}_2^c \dots \vec{a}_n^c] \text{ y } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

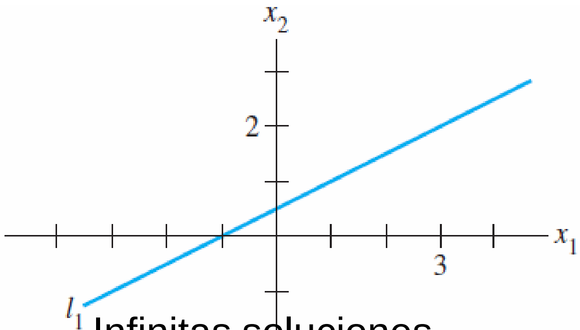
$_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{m1})$ son vectores (o matrices) columnas. Si el sistema tiene solución se dice que $\vec{b}$ nación lineal de los vectores $\vec{a}_j$

natricial: $A \cdot X = B$ siendo $A = (a_{ij})$ la matriz de coeficientes de cada variable, $B =$ a matriz columna de términos independientes, $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ la matriz columna de las ada sistema de ecuaciones tiene asociado una matriz ampliada, que se denota por $AB$, $[A|B]$ quella con los coeficientes y términos constantes del sistema

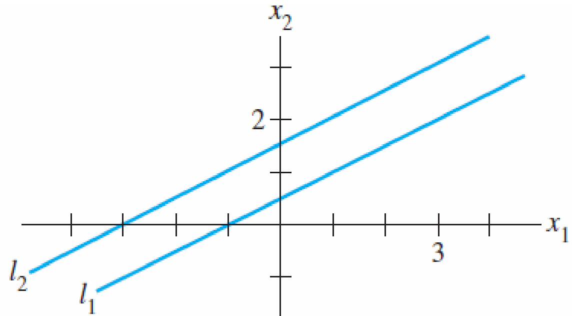
$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$




solución
eterminado)




Infinitas soluciones
(compatible indeterminado)




No hay solución
(incompatible)

## nas escalonados

onado por filas: Un sistema está en forma escalonada por filas si la primera entrada no nula ción está a la derecha de la de la ecuación anterior:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2j_2}\, x_{j_2} + a_{2j_2+1}\, x_{j_2+1} + \ \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{rj_r}\, x_{j_r} + a_{rj_r+1}\, x_{j_r+1} + \ \dots a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\}$$

$< j_r$ y $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, a_{rj_r} \neq 0$ (número de entradas principales: $r \leq n$). Si $x_k$ no es la nita de ninguna ecuación ($x_k \neq x_1, x_k \neq x_{j_2}, \dots, x_k \neq x_{j_r}$) será una variable libre.

emas escalonados por filas pueden resolverse por sustitución hacia atrás o regresiva, incógnita de la última ecuación y sustituyendo de abajo a arriba.

**atriz) escalonado (por filas):** i) las filas nulas, si las hay, ocupan las posiciones de más s dos filas no nulas la entrada principal de la fila superior está más a la izquierda (o sea, algún cero más que la fila anterior) de modo que las entradas debajo de una entrada ero.

**atriz) escalonado reducido (por filas):** iii) en cada fila no nula, el primer elemento no nulo ma 1 dominante; iv) en las columnas en las que están los 1's dominantes todos los demás la columna son cero (o sea cada 1 principal es la única entrada no nula en su columna).

**vote:** Si una matriz está en forma escalonada los valores de los coeficientes en sus entradas denominan **pivotes**. Una **posición pivote** de una matriz es una ubicación que corresponde al en la forma escalonada reducida . Una **columna pivote** es una columna que contiene una e.

istema de ecuaciones las variables correspondientes a columnas pivote son básicas. El resto

istema de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas escalonado hay tantas columnas pivote en $A$ (en entradas principales (filas no nulas)

Matrices Escalonadas

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Matrices Escalonadas Reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

## ma de existencia y unicidad

**particular** del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es un vector $\vec{x}$ con valores de las incógnitas $x_i = k_i \in K, i =$
acen cierta cada ecuación del sistema y se denota por $\vec{x} = (k_1, k_2, .. k_n) \in K^n$.

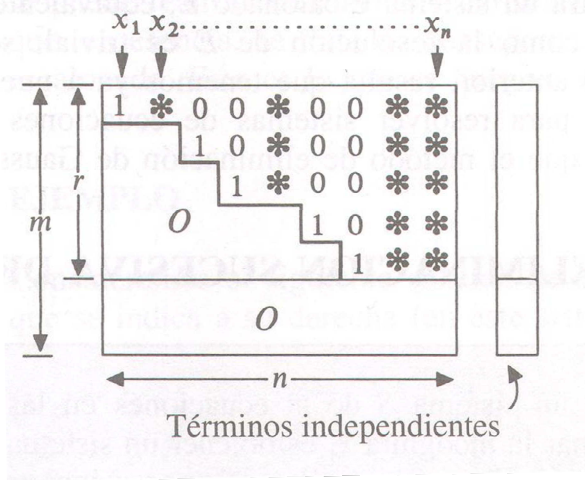
**olución** (también llamado solución general o espacio solución) $X$ son todas las soluciones

sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ o bien no tiene solución (incompatible), o tiene una única solución
eterminado) o tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado).

**existencia y unicidad**. Sea $S$ un sistema escalonado de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas y
matriz ampliada. De las $m$ filas llamaremos $r$ al número de ellas que tienen en $A$ algún
nulo. Así, las $m - r$ últimas filas solo contienen ceros en $A$. Se verifica:

**atible si** y solo si sus últimos $m - r$ términos independientes son todos nulos, o sea si la
xtremo derecho de $[A \mid B]$ no es una columna pivote

o que los $m - r$ últimos términos independientes son nulos, el sistema es compatible
**si $r = n$** (en este caso no existen variables libres y hay única solución) e **indeterminado**
al menos una variable libre y por tanto infinitas soluciones).



## ıción de sistemas de ecuaciones

### ılencia por filas

ıivalentes: Dos sistemas lineales son equivalentes si **tienen el mismo conjunto solución**.
; operaciones elementales fila transforman un sistema de ecuaciones en otro equivalente:

: cambiar ecuaciones en el sistema: $[E_1]\ R_i \leftrightarrow R_j$

to: multiplicar una ecuación por una contante no nula. $[E_2]\ k \cdot R_i \rightarrow R_i\ , k \neq 0$

: sumar a una ecuación un múltiplo de otra: $[E_3]\ k' \cdot R_j + R_i \rightarrow R_i\ ,\ k' \neq 0$

áctica, 2 y 3 se hacen en un solo paso $k' \cdot R_j + k \cdot R_i \rightarrow R_i\ , k, k' \neq 0$ pero no es una operación
 lo que no se recomienda. Las operaciones fila son reversibles.

ɔpiedad fundamental de equivalencia. Un sistema de ecuaciones lineales es **equivalente** a
 los sistemas que resultan de realizar en él una operación elemental en sus filas. Así, si un
obtiene de otro $S$ mediante **sucesión finita de operaciones elementales fila**, entonces $S$ y
smo conjunto solución (son equivalentes por filas).

icidad de la forma escalonada reducida. Todo sistema es equivalente a más de un sistema
ɔr filas, pero a uno y solo un sistema escalonado reducido por filas (independientemente del
ɔperaciones fila).

**tricial**: Cualquier operación elemental fila en las ecuaciones de un sistema es equivalente a
sma operación en la filas de la matriz $[A \mid B]$. Así, aplicadas sobre la matriz ampliada las
elementales fila producen la matriz ampliada de un sistema equivalente.

## o de Gauss

**gaussiana:** proceso por el que se obtiene un sistema equivalente en el que cada ecuación ıgnita menos que la anterior. Existen dos versiones del método de eliminación:

Gauss: usar operaciones elementales para reducir el sistema a uno equivalente escalonado, tución hacia atrás para resolver el sistema (de abajo a arriba, o regresivamente).

Gauss-Jordan: usar operaciones elementales para reducir el sistema a su equivalente spejar directamente de cada una de sus ecuaciones la incógnita.

aramétrica del conjunto solución:

del sistema consiste en determinar el conjunto solución. Si el sistema tiene solución:
riables libres, la solución es única (las variables básicas están determinadas);
bles libres, hay infinitas soluciones (las variables libres actúan como parámetros).

ar a cada variable libre un parámetro (valor escalar) y expresar cada variable básica en hos parámetros

bir la solución paramétrica de $\vec{x}$ como un vector cuyas entradas dependen de los parámetros.

omponer el vector $\vec{x}$ como combinación lineal de vectores usando como escalares de la ineal a los parámetros de las variables libres.

Método de Gauss

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Box.I.2.1. Método de Eliminación de Gauss-Jordan

**A.** Método de Eliminación de Gauss. Obtiene una forma escalonada de un sistema de
; (matriz ampliada). Sea $A = [A \ \vec{b}]$ la matriz ampliada del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Encontrar la primera columna no nula que se encuentra más a la izquierda. Supongamos
$_1$. Es una columna pivote.

Si es necesario, intercambiar las filas de forma que aparezca una entrada no nula en la
fila de la columna pivote $j_1$ (esto es, conseguir que $a_{1j_1} \neq 0$).

Utilizar $a_{1j_1}$ como pivote para obtener ceros (mediante reemplazo de filas) en todas las
es de la columna ubicadas debajo del pivote (o sea, eliminar $x_{j_1}$ de todas las ecuaciones
la primera). Para ello, efectuar la operación elemental: $(-a_{ij_1}/a_{1j_1})\,R_1 + R_i \rightarrow R_i$ para

Examinar cada ecuación resultante: a) Si alguna ecuación es degenarada con $b = 0$
liminarse o intercambiarse por la última fila; b) Si alguna ecuación es degenerada con
bandonar el algoritmo, pues el sistema es incompatible.

Repetir los pasos 1, 2, 3 y 4 con la submatriz (subsistema) formada por todas las filas
ndo la primera.

Continuar con los pasos anteriores hasta que el sistema esté en forma escalonada (forma
s) o hasta que se llegue a 4b.

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

**B**. Método de Eliminación de Gauss-Jordan. Reduce por filas una matriz escalonada a su lonada reducida $C_r$ (la forma canónica por filas). Si $[A\ \vec{b}]$ está en forma escalonada.

Comenzar con el pivote situado más a la derecha $a_{rj_r}$. Si el pivote no es un 1 principal, na operación de escalamiento para hacerlo igual a 1; esto es, multiplicar la última fila no por $1/a_{rj_r}$ para que la entrada principal sea 1.

Usar $a_{rj_r} = 1$ como pivote para obtener ceros sobre él mediante operaciones elementales plazo de filas; esto es, para $i = r-1, r-2, \ldots, 1$ efectuar $-a_{ij_r}R_r + R_i \to R_i$.

Trabajar hacia arriba y hacia la izquierda repitiendo los pasos 7 y 8 para las filas $_{-2}, \ldots, R_2$.

. Aplicar la operación de escalamiento $\left(1/a_{1j_1}\right)R_1 \to R_1$.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

## …mas homogéneos e inhomogéneos

…n sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si se puede escribir de la forma $A\vec{x} = \vec{0}$. $A$ … $K^m$. Todo sistema inhomogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$, tiene un sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

…so de sistemas homogéneos, trabajar con la matriz ampliada del sistema $[A \mid B]$ es … hacerlo con la matriz de coeficientes $A$ del sistema.

…lo **sistema homogéneo** $A\vec{x} = \vec{0}$ **es compatible** (tiene al menos la solución trivial $\vec{x} = \vec{0}$). … sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas tiene infinitas soluciones.

…un sistema inhomogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible, entonces su solución general se puede …ndo el conjunto solución $X$ del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$ a una solución particular …ema inhomogéneo. Esto es $\vec{x} = \vec{x}_1 + X$ es la solución general de $A\vec{x} = \vec{b}$.

…o, si $\vec{x} = \vec{x}_1$ y $\vec{x} = \vec{x}_2$ son dos soluciones particulares distintas de $A\vec{x} = \vec{b}$ entonces … $- \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + X$ es la solución general del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ y $X = k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ es la solución …stema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.